INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2,
Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală – 11 februarie 2012

Clasa a XI-a - Bareme

1).Fie $A, B \in M_n(Z)$ astfel încât numerele $\det A$ şi $\det(A+B)$ sunt întregi impare. Demonstraţi că $\det(A+kB) \neq 0$ pentru $k \in Z$.

propusă de prof. Opriş Adonia

Barem de corectare:

Polinomul $P(X) = \det(A + XB)$ are coeficienţi întregi deoarece A, B au elemente numere întregi

....*2p*

Mai mult $P(0) = \det A$ şi $P(1) = \det(A+B)$ sunt numere impare..........................*1p*

Presupunem prin absurd că există $k \in Z$ astfel încât $P(k) = 0$. Atunci $X - k$ divide polinomul $P(X)$ adică $P(X) = (X-k)Q(X)$, Q polinom cu coeficienţi întregi..................................*2p*

Atunci $P(0) = -kQ(0)$ **şi** $P(1) = (1-k)Q(1)$ şi cum unul dintre numerele $-k$, $1-k$ este par rezultă că unul dintre numerele $P(0)$, $P(1)$ este par; contradicţie.........................*1p*

Prin urmare $P(k) \neq 0$**,** $\forall k \in Z$ adică $\det(A+kB) \neq 0$, pentru $k \in Z$ *1p*

2). Se dă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$, $\forall n \in N^*$

Să se arate că: $\lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot a_n) = 1$.

Selectată de către prof. Bara Lajos din OM, SUA

Barem de corectare:

Avem $a_1 \in (0,1) \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot (1-a_1) \in (0,1)$

Presupunem $a_n \in (0,1)$ şi avem $a_{n+1} = a_n \cdot (1-a_n) \in (0,1)$

Conform principiului inducţiei matematice obţinem: $0 < a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. 2 puncte

Deoarece $a_n \in (0,1)$ şi $1 - a_n \in (0,1)$ rezultă că $a_{n+1} = a_n \cdot (1-a_n) < a_n$ 1 punct

Şirul dat este descrescător şi mărginit inferior de 0. Fiind şir convergent, putem trece direct la limită în relaţia de recurenţă. Rezultă: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 1 punct

Definim şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, b_n = n\cdot a_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_n}}$.

Din relaţiile de mai sus rezultă că şirul $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător nemărginit, îndeplinând condiţiile aplicării teoremei Cesaro-Stolz. 1 punct

Rezultă: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1-n}{\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n\cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2\cdot(1-a_n)}{a_n - a_n\cdot(1-a_n)} = \lim_{n\to\infty}(1-a_n) = 1$

Deci $\lim_{n\to\infty}(n\cdot a_n) = 1$. 2 puncte

3). Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x}-n}{x^n-1}\right)$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*, n\geq 2$.

Prelucrare de prof. Jecan Ioan

<u>Barem de corectare:</u>

Calculăm mai întâi limita din paranteză:

$$l = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(\sqrt{x}-1)+(\sqrt[3]{x}-1)+\ldots+(\sqrt[n]{x}-1)}{x^n-1};$$

Amplificăm cu conjugatele fiecărei paranteze (exceptând prima):

$$(\sqrt[k]{x}-1)(\sqrt[k]{x^{k-1}}+\sqrt[k]{x^{k-2}}+\ldots+\sqrt[k]{x}+1) = x-1.$$

$$l = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\ldots+1}\right)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}}{n}$$ (4 puncte)

Pentru calculul $L = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}}{n}$ aplicăm lema Cesaro-Stolz.

Notăm $a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}$, $b_n = n$ şir strict crescător şi nemărginit.

Calculăm $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow L = 0.$ (3 puncte)

4). Fie $A, B \in M_2 \in (\mathbf{R})$ astfel încât Tr(AB)=3 şi det(AB) = 1. Să se arate că:

a) Matricea A este inversabilă

b) $(BA)^{-1} = 3I_2 - BA$

Propusă de prof. Lucaciu Simona

Barem de corectare:

a) Deoarece 1 = det(AB) = det(A) $\cdot$ det(B) $\Rightarrow$ det(A) $\neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă (2p)

b) Scriem relația lui Hamilton –Cayley pentru matricea BA

$(BA)^2 - Tr(BA)\cdot(BA) + \det(BA)\cdot I_2 = O_2$ (2p)

Folosind proprietățile: Tr (BA)= Tr (AB) şi det. (BA) = det (AB) , obținem (2p)

$(BA)^2 - 3(BA) + I_2 = O_2 \Rightarrow I_2 = 3(BA) - (BA)^2 \Rightarrow I_2 = (BA)\cdot(3I_2 - (BA)) = (3I_2 - (BA))\cdot(BA)$

Deoarece det (BA) = 1 $\Rightarrow$ BA este inversabilă şi din relația de mai sus (1p)

obținem că $(BA)^{-1} = 3I_2 - BA$

NOTĂ:

Pentru orice altă soluție corectă se va acorda punctajul maxim.